نشریه مکانیک سنگ
Journal of Rock Mechanics
دوره دهم، شماره۲، تابستان۱۴۰۵، صفحه۲۵تا۴۳
https://doi.org/10.22034/IRSRM.2026.505958.1122



بررسی تحلیلی اندرکنش چاه-لوله جداری در محیط پوروالاستیک اشباع تحت شرایط تنش هیدرواستاتیک

علی اقبالی مقدم[۱]؛ ابوالفضل عبدالهی‌پور[۱]؛ علی‌رضا کارگر[۱*]
۱- دانشکده مهندسی معدن،دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

دریافت : ۱۴۰۵/۰۵/۰۳؛ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۶
(*نویسنده مسئول: ar.kargar@ut.ac.ir)

چکیده

پایداری چاه‌های حفاری‌شده در سازندهای سنگی اشباع، از مسائل مهم در طراحی و بهره‌برداری ایمن چاه‌ها به شمار می‌رود. در بررسی این موضوع، اندرکنش میان اسکلت جامد و سیال منفذی و در نتیجه تکامل زمانی تنش، جابجایی و فشار منفذی نقش مهمی را ایفا می‌کند. بااین‌حال، بیشتر راه‌حل‌های تحلیلی موجود، چاه را بصورت حفریه‌ای باز در محیط پوروالاستیک در نظر می‌گیرند و اثر هم‌زمان لوله جداری و اندرکنش آن با سازند را بررسی نمی‌کنند. در این مقاله، یک راه‌حل تحلیلی کوپل کامل برای تعیین پاسخ هیدرومکانیکی چاه دایره‌ای عمیق همراه با لوله جداری در محیط سنگی پوروالاستیک و اشباع ارائه می‌شود. بر اساس نظریه پوروالاستیسیته، توزیع تنش، جابجایی و فشار منفذی در سنگ و تنش و جابجایی در لوله جداری استخراج می‌شود. راه‌حل تحلیلی با مدل‌سازی عددی به روش اجزا محدود در نرم‌افزار *COMSOL Multiphysics* اعتبارسنجی می‌شود و اثر مدول برشی، مدول حجمی، تراوایی ذاتی، ضریب تنش مؤثر بیو و تخلخل بر تنش مماسی در زمان‌های مختلف بررسی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که پاسخ تحلیلی فشار منفذی، جابجایی، تنش شعاعی و تنش مماسی با نتایج مدل‌سازی عددی در سنگ و لوله جداری تطابق بسیار خوبی دارد. تحلیل حساسیت مشخص کرد که مدول‌های برشی و حجمی در نزدیکی چاه اثر بیشتری بر تنش مماسی دارند، درحالی‌که اثر تراوایی و تخلخل در زمان کوتاه در فاصله حدود ۱ تا ۱/۵ برابر شعاع چاه بیشینه می‌شود و در زمان بلندتر در فواصل دورتری از چاه محسوس است. این یافته‌ها نشان می‌دهد که راه‌حل ارائه‌شده می‌تواند به عنوان ابزاری برای ارزیابی پاسخ هیدرومکانیکی چاه دارای لوله جداری و مبنایی برای اعتبارسنجی مدل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد.

واژگان کلیدی

پوروالاستیسیته؛ پاسخ وابسته به زمان؛ معادلات حاکم؛ کوپل هیدرومکانیکی؛ راه‌حل تحلیلی؛ لوله جداری

۱- مقدمه

بسیاری از فضاهای زیرزمینی عمیق در سازندهای سنگی متخلخل و حاوی سیال، حفاری می‌شوند. بررسی‌ها نشان داده است که پاسخ سنگ به حفاری تنها به بازتوزیع تنش و ایجاد تغییرشکل محدود نمی‌شود، بلکه با تغییر فشار منفذی و توزیع آن در محیط متخلخل نیز همراه است. این اندرکنش میان اسکلت جامد و سیال منفذی، پاسخ محیط را به فرآیندی وابسته به زمان تبدیل می‌کند، زیرا انتشار فشار منفذی پس از حفاری بر روند تکامل تنش، جابجایی و فشار منفذی در اطراف فضای حفاری‌شده تأثیر می‌گذارد. بنابراین، درک رفتار محیط متخلخل اشباع و نحوه تکامل پاسخ آن پس از حفاری، برای توصیف صحیح رفتار هیدرومکانیکی فضاهای زیرزمینی

ضروری است.

پایداری چاه‌های حفاری‌شده در سازندهای سنگی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. حفاری چاه موجب برهم خوردن میدان تنش اولیه و بازتوزیع تنش در سنگ پیرامون می‌شود و در نتیجه، تغییرشکل و پاسخ مکانیکی سازند تحت تأثیر وضعیت تنش برجا و ویژگی‌های مکانیکی آن قرار می‌گیرد. راه‌حل‌های کلاسیک الاستیک برای مسائل مربوط به چاه، دیدگاه‌های بنیادی و ارزشمندی در خصوص بازتوزیع تنش و تغییرشکل پیرامون آن فراهم کرده‌اند. بااین‌حال، این رویکردها اثر گذرای انتشار سیال در منافذ و تغییرات تنش ناشی از تغییرات فشار منفذی را در نظر نمی‌گیرند[۲,۱].

هنگامی که سازند از سیال اشباع باشد، حفاری علاوه بر بازتوزیع میدان تنش، میدان فشار منفذی را نیز تغییر می‌دهد و در نتیجه، پاسخ‌های کوپل‌شده تغییرشکل و فشار سیال ایجاد می‌شوند که هم‌زمان با بازتوزیع سیال در محیط متخلخل، در طول زمان تکامل می‌یابند[۴,۳]. این رفتار گذرای هیدرومکانیکی را می‌توان بطور مناسب در چارچوب پوروالاستیسیته توصیف کرد. نظریه سازگاری که قادر است این فرایندهای کوپل‌شده هیدرومکانیکی را در نظر بگیرد، نظریه پوروالاستیسیته بیو[1] است[۵-۷].

برای بررسی رفتار هیدرومکانیکی حفریات زیرزمینی، از روش‌های تحلیلی و عددی بطور گسترده استفاده شده است. راه‌حل‌های تحلیلی مبتنی بر نظریه پوروالاستیسیته نقش اساسی در درک و بررسی پاسخ گذرای چاه در برابر اغتشاشات هیدرولیکی و مکانیکی ایفا کرده‌اند. دتورنی[2] و چنگ[3] (۱۹۸۸) یک راه‌حل تحلیلی پوروالاستیک برای پاسخ‌های تنش، جابجایی و فشار منفذی در پیرامون چاه، تحت شرایط تنش‌های غیرهیدروستاتیک برجا، ارائه کردند که چارچوبی بنیادی برای تحلیل گذرای چاه‌ها در سازندهای اشباع از سیال فراهم می‌کند[۳]. کوی[4] و ابوسلیمان[5] (۲۰۰۱) با استفاده از یک پیکربندی تحلیلی مبتنی بر نظریه پوروالاستیسیته بیو و روش‌های تبدیل لاپلاس، پاسخ پورومکانیکی وابسته به زمان سازندهای استوانه‌ای اشباع از سیال را تحت بارگذاری بررسی کردند[۸].

جائو[6] و همکاران (۲۰۱۶) یک راه‌حل تحلیلی پوروالاستیک برای یک چاه استوانه‌ای حفاری‌شده در یک محیط متخلخل نامتناهی و اشباع از سیال، تحت اثر تنش‌های برجا، ارائه کردند[۹]. عبدالهی پور[7] و همکاران (۲۰۱۶) یک فرمول‌بندی المان مرزی غیرمستقیم را برای تحلیل پاسخ کوپل‌شده سنگ‌های پوروالاستیک ارائه کردند. روش پیشنهادی با نتایج حاصل از راه‌حل‌های تحلیلی و عددی تطابق خوبی نشان داد و قابلیت آن را برای حل مسائل مقدار مرزی در محیط‌های پوروالاستیک به اثبات رساند[۱۰].

لو[8] و همکاران (۲۰۲۵) با توسعه یک راه‌حل تحلیلی برای تنش‌های کوتاه‌مدت و بلندمدت در یک چاه افقی واقع در سازند پوروالاستیک ناهمسانگرد عرضی، اثر تغییرات فشار منفذی بر پایداری چاه را بررسی کردند. نتایج نشان داد که اثر پوروالاستیسیته و ناهمسانگردی بر پایداری چاه قابل‌توجه است و شرایط بلندمدت می‌تواند محدوده پایداری چاه را تغییر دهد[۱۱]. لی[9] و همکاران (۲۰۲۶) با ارائه یک راه‌حل تحلیلی پوروالاستیک زهکشی‌نشده، اثر ناهمسانگردی بر پایداری کوتاه‌مدت چاه‌های با شیب دلخواه در سازندهای همسانگرد عرضی را بررسی کردند. نتایج نشان داد که ناهمسانگردی و اثرات زهکشی‌نشده می‌توانند بطور قابل‌توجهی بر توزیع تنش و فشار منفذی و پایداری چاه اثر بگذارند[۱۲].

روش‌های عددی نیز بطور گسترده برای بررسی پاسخ هیدرومکانیکی چاه‌ها تحت شرایط کوپل‌شده هیدرومکانیکی بکار گرفته شده‌اند. غلامی[10] و همکاران (۲۰۱۶) با بهره‌گیری از تحلیل ژئومکانیکی و مدل‌سازی عددی، علت‌های آسیب‌دیدگی لوله جداری در یک مخزن کربناته در جنوب ایران را بررسی کردند[۱۳]. عبدالهی پور و همکاران (۲۰۱۶) با استخراج راه‌حل‌های بنیادی پوروالاستیک، یک روش عددی کاملاً کوپل هیدرومکانیکی مبتنی بر روش ناپیوستگی جابجایی و کد *CEP-DDM* برای شبیه‌سازی گسترش وابسته به زمان ترک در محیط پوروالاستیک ارائه کردند. نتایج روش پیشنهادی با راه‌حل تحلیلی در شرایط کوتاه‌مدت و

[1] *Biot*
[2] *Detournay*
[3] *Cheng*
[4] *Cui*
[5] *Abousleiman*
[6] *Gao*
[7] *Abdollahipour*
[8] *Lu*
[9] *Li*
[10] *Gholami*

بلندمدت تطابق خوبی نشان داد و قابلیت روش برای شبیه‌سازی گسترش ترک در زمان و مکان تأیید شد[۱۴].

هن[11] و همکاران (۲۰۱۹) یک مدل عددی کوپل‌شده تراوش–مکانیکی برای بررسی تغییرشکل سازند و گسیختگی لوله جداری در حین تزریق آب در میدان‌های نفتی ارائه کردند[۱۵].

ژو[12] و همکاران (۲۰۲۱) با استفاده از مدل‌سازی عددی، پاسخ هیدرومکانیکی یک تونل تحت تأثیر یک غار کارستی پر از آب را بررسی کردند و نشان دادند که اندرکنش سیال–سنگ می‌تواند توزیع تنش، جابجایی و فشار منفذی پیرامون تونل را بطور قابل‌توجهی تغییر دهد[۱۶].

با وجود مطالعات گسترده عددی انجام‌شده، همچنان نیاز به یک راه‌حل تحلیلی برای افزایش دقت تعیین میدان تنش، جابجایی و فشار منفذی بصورت کوپل کامل، که بتواند به عنوان مبنا برای اعتبارسنجی مدل‌های عددی استفاده شود، احساس می‌شود. راه‌حل‌های تحلیلی ارائه‌شده بطور عمده چاه را بصورت یک حفریه باز در محیط پوروالاستیک در نظر می‌گیرند و اثر حضور لوله جداری و اندرکنش آن با محیط پوروالاستیک بر پاسخ هیدرومکانیکی بطور هم‌زمان را مورد بررسی قرار نمی‌دهند. ازاین‌رو، بررسی تحلیلی پاسخ هیدرومکانیکی چاه در حضور لوله جداری و با در نظر گرفتن اندرکنش میان لوله جداری و سازند پوروالاستیک، بمنظور تعیین دقیق اثر آن بر توزیع تنش، جابجایی و فشار منفذی، همچنان نیازمند تحقیق بیشتر است.

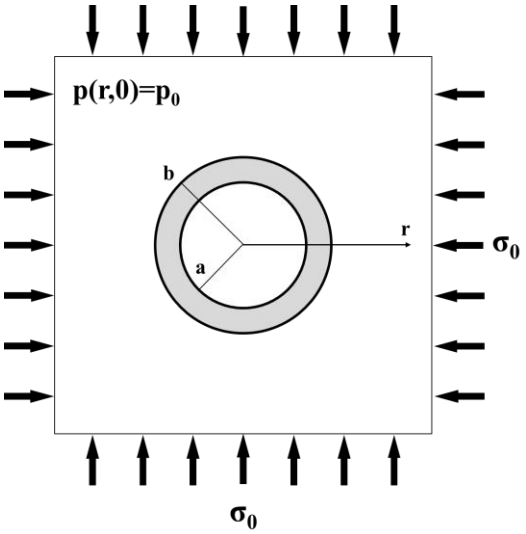
در این مقاله، یک راه‌حل تحلیلی برای تعیین پاسخ هیدرومکانیکی چاه مجهز به لوله جداری در یک محیط پوروالاستیک اشباع تحت میدان تنش هیدرواستاتیک ارائه می‌شود که در آن، کوپل کامل میان اسکلت جامد و سیال منفذی برقرار است. بر این اساس، میدان‌های تنش، جابجایی و فشار منفذی در محیط پوروالاستیک در حضور لوله جداری تعیین می‌شوند. این چارچوب علاوه بر فراهم‌کردن امکان بررسی اثر لوله جداری بر پاسخ، مبنایی تحلیلی برای اعتبارسنجی مدل‌های عددی فراهم می‌کند.

۲- تعریف مسئله

در این مقاله، اندرکنش هیدرومکانیکی یک چاه دایره‌ای عمیق همراه با لوله جداری در یک محیط سنگی پوروالاستیک بررسی می‌شود. با استفاده از نظریه پوروالاستیسیته، میدان‌های تنش، جابجایی و فشار منفذی در اطراف چاه تعیین می‌شوند؛ به گونه‌ای که سنگ پیرامون چاه بصورت یک محیط پوروالاستیک، اشباع، همگن و همسانگرد و لوله جداری بصورت یک محیط الاستیک خطی و غیرمتخلخل در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به عمق زیاد حفریه، میدان تنش اولیه در سنگ بصورت هیدرواستاتیک فرض می‌شود و اثر افزایش‌های موضعی تنش ناشی از نیروی گرانش در اطراف حفریه قابل اغماض است. همچنین، مسئله با توجه به شرایط هندسه و بارگذاری آن، در حالت تقارن محوری، کرنش صفحه‌ای و مختصات قطبی تحلیل می‌شود. در این مقاله، فشار دارای علامت منفی و کشش دارای علامت مثبت است.

بمنظور کاهش پیچیدگی حل تحلیلی، لوله جداری و غلاف سیمان پشتیبان آن بصورت یکپارچه و با مشخصات مکانیکی غلاف سیمانی ساده‌سازی می‌شوند. همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، غلاف سیمانی دارای شعاع داخلی a و شعاع خارجی b است و در تماس مستقیم با سنگ میزبان قرار دارد.



شکل ۱- هندسه و شرایط اولیه مسئله

فشار منفذی اولیه در محیط پوروالاستیک یکنواخت است و از اثر فشار سیال حفاری بر سطح داخلی غلاف سیمانی صرف‌نظر می‌شود. همچنین، به دلیل غیرمتخلخل بودن غلاف سیمانی، هیچ‌گونه شار سیال از آن عبور نمی‌کند و زهکشی

[11] *Han*

[12] *Xu*

سیال در مرز بین سنگ و سیمان رخ می‌دهد. غلاف سیمانی پیش از وقوع هرگونه تغییرشکل ناشی از حفاری در محیط پوروالاستیک نصب می‌شود و فصل مشترک بین سنگ و غلاف سیمانی بصورت بدون لغزش[13] است. در ادامه، معادلات حاکم، شرایط اولیه و مرزی و راه‌حل تحلیلی این مسئله بررسی می‌شود.

۲-۱- معادلات حاکم بر مسئله

نظریه پوروالاستیسیته خطی و همسانگرد نخستین بار توسط بیو [۵] برای مدل‌سازی رفتار جامدات اشباع از سیال ارائه شد و سپس توسط پژوهشگران دیگر [۱۷-۱۹] توسعه و گسترش یافت. در نظریه پوروالاستیسیته، مصالح زمین‌شناسی به عنوان محیطی متشکل از دو بخش جامد و سیال در نظر گرفته می‌شوند. در این مقاله، از فرمول‌بندی اولیه بیو استفاده شده است. این فرمول‌بندی عمدتاً شامل پارامترهای دینامیکی اصلی، یعنی تنش کل و فشار منفذی به همراه کمیت‌های متناظر آن‌ها، یعنی کرنش جامد e و تغییر حجم سیال به ازای واحد حجم مرجع ζ است[۱۰].

معادلات حاکم بر نظریه پوروالاستیسیته خطی و همسانگرد برای حل مسئله موردنظر شامل موارد زیر است:

- معادلات ساختاری

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}e - \alpha\delta_{ij}p \quad (۱)$$

$$p = M(\zeta - \alpha e) \quad (۲)$$

- معادله تعادل تنش

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (۳)$$

- قانون دارسی

$$q_i = -\kappa\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (۴)$$

- معادله پیوستگی سیال

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (۵)$$

معادلات فوق با یکدیگر ترکیب می‌شوند و مجموعه‌ای از معادلات میدان بر حسب جابجایی و فشار منفذی حاصل بدست می‌آید. ترکیب معادلات ساختاری و تعادل تنش، معادله الاستیسیته به همراه جمله کوپل‌شدن سیال را تشکیل می‌دهد.

$$G\nabla^2\vec{u} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\nabla(\nabla.\vec{u}) = \alpha\nabla p \quad (۶)$$

با ترکیب معادلات قانون دارسی، پیوستگی سیال و معادله فشار از روابط ساختاری، رابطه انتشار سیال بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa M\nabla^2 p = -\alpha M\frac{\partial e}{\partial t} \quad (۷)$$

۲-۲- شرایط مرزی و اولیه

در این مقاله، اندیس‌های r و c به ترتیب برای کمیت‌های مربوط به سنگ و غلاف سیمانی بکار می‌روند. میدان تنش و فشار منفذی اولیه در سنگ برابر با σ_0 و p_0 درنظر گرفته می‌شود. همچنین، تغییرات تنش و فشار منفذی القایی به دلیل حفاری در فاصله دور از حفریه قابل چشم‌پوشی است.

$$\sigma^{(r)}_{rr(\infty,t)} = \sigma_0 \quad (۸)$$

$$p^{(r)}_{(\infty,t)} = p_0 \quad (۹)$$

با توجه به اتصال بدون لغزش بین سنگ و سیمان، مقادیر تنش شعاعی و جابجایی شعاعی در دو طرف مرز سنگ و سیمان پیوسته و برابر هستند. در دیواره داخلی غلاف سیمانی فشار سیال حفاری برابر p_i اعمال می‌شود. با توجه به زهکشی سیال در مرز خارجی غلاف سیمانی، فشار منفذی در این مرز صفر درنظر گرفته می‌شود.

$$u^{(r)}_{(b,t)} = u^{(c)}_{(b,t)} \quad (۱۰)$$

$$\sigma^{(r)}_{rr(b,t)} = \sigma^{(c)}_{rr(b,t)} \quad (۱۱)$$

$$\sigma^{(c)}_{rr(a,t)} = p_i \quad (۱۲)$$

$$p_{(b,t)} = 0 \quad (۱۳)$$

۳- راه‌حل تحلیلی

با توجه به شرایط ذکرشده در بخش توصیف مسئله و معادلات حاکم، روابط تعادل، تنش-کرنش، کرنش-جابجایی و کرنش حجمی برای مسئله حاضر، بصورت زیر در مختصات قطبی بدست می‌آیند.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \quad (۱۴)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}e + 2Ge_{rr} - \alpha p \quad (۱۵)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}e + 2Ge_{\theta\theta} - \alpha p \quad (۱۶)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}e - \alpha p \quad (۱۷)$$

[13] *Non-Slip*

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (۱۸)$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (۱۹)$$

$$e = e_{rr} + e_{\theta\theta} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r} \quad (۲۰)$$

با جای‌گذاری معادلات تنش-کرنش و کرنش در معادله تعادل، معادله ناویر-کوشی مطابق رابطه (۲۱) بدست می‌آید که بصورت رابطه (۲۲) بازنویسی می‌شود.

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - \alpha\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r u_r}{\partial r}\right) = \frac{\eta}{G}\frac{\partial p}{\partial r} \quad (۲۲)$$

با حل رابطه (۲۲)، کرنش حجمی مطابق رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$e = \frac{\eta}{G}p + 2A_1(t) \quad (۲۳)$$

رابطه جابجایی مورداستفاده در حل مسئله، با انتگرال‌گیری بدست می‌آید. با بهره‌گیری از روابط ساختاری، معادلات تنش تعیین می‌گردند.

$$u_r^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}}{G^{(r)}}\frac{1}{r}\int rp(r,t)\,dr + A_1(t)r + \frac{A_2(t)}{r} \quad (۲۴)$$

$$\sigma_{rr}^{(r)} = -2\eta^{(r)}\frac{1}{r^2}\int rp(r,t)\,dr + \frac{2G^{(r)}}{1-2\nu^{(r)}}A_1(t) - \frac{2G^{(r)}}{r^2}A_2(t) \quad (۲۵)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(r)} = 2\eta^{(r)}\frac{1}{r^2}\int rp(r,t)\,dr - 2\eta^{(r)}p + \frac{2G^{(r)}}{1-2\nu^{(r)}}A_1(t) - \frac{2G^{(r)}}{r^2}A_2(t) \quad (۲۶)$$

$$\sigma_{zz}^{(r)} = -2\eta^{(r)}p + \frac{4G^{(r)}\nu^{(r)}}{1-2\nu^{(r)}}A_1(t) \quad (۲۷)$$

ترکیب مؤلفه‌های تنش نشان می‌دهد که این کمیت‌ها تنها تابع زمان هستند؛ این ویژگی برای میدان جابجایی کرنش صفحه‌ای غیرچرخشی نیز پیش‌بینی شده است[۲۰].

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + 2\eta p = \frac{4G}{1-2\nu}A_1(t) \quad (۲۸)$$

شرط بدون چرخش بودن میدان جابجایی نشان می‌دهد که فشار از معادله انتشار ارائه‌شده در بخش معادلات حاکم پیروی می‌کند و فرم آن بصورت رابطه (۲۹) بیان می‌شود[۲۰].

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\frac{2\alpha}{S}\frac{dA_1(t)}{dt} \quad (۲۹)$$

مقدار ثابت $A_1(t)$ با توجه به میدان تنش برجا اولیه زمین بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\lim_{r\to\infty}\sigma_{rr}^{(r)} = \sigma_0 \Rightarrow A_1(t) = \frac{\sigma_0(1-2\nu^{(r)})}{2G^{(r)}} \quad (۳۰)$$

با حل معادله ناویر، جابجایی و تنش شعاعی در غلاف سیمانی بصورت روابط (۳۱) و (۳۲) تعیین می‌شوند.

$$u_r^{(c)} = B_1 r + \frac{B_2}{r} \quad (۳۱)$$

$$\sigma_{rr}^{(c)} = \frac{2G^{(c)}}{1-2\nu^{(c)}}B_1 - \frac{2G^{(c)}}{r^2}B_2 \quad (۳۲)$$

ثابت‌های $A_2(t)$، B_1 و B_2 حاصل از حل معادلات در غلاف سیمانی و سنگ، با استفاده از شرایط مرزی ارائه‌شده برای غلاف سیمانی محاسبه می‌شوند. با جای‌گذاری مقادیر شعاع داخلی و خارجی غلاف سیمانی، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$\frac{A_2(t)}{b} = B_1 b + \frac{B_2}{b} \quad (۳۳)$$

$$\frac{2G^{(r)}}{1-2\nu^{(r)}}A_1(t) - \frac{2G^{(r)}}{b^2}A_2(t) = \frac{2G^{(c)}}{1-2\nu^{(c)}}B_1 - \frac{2G^{(c)}}{b^2}B_2 \quad (۳۴)$$

$$\frac{2G^{(c)}}{1-2\nu^{(c)}}B_1 - \frac{2G^{(c)}}{a^2}B_2 = p_i \quad (۳۵)$$

ثابت‌های $A_2(t)$، B_1 و B_2 محاسبه‌شده با استفاده از دستگاه معادلات، در جدول ۱ قابل مشاهده است.

معادله انتشار فشار منفذی بصورت زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{\partial p}{\partial t} - c\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0 \quad (۳۶)$$

برای حل هیدرولیکی مسئله به دو بخش تقسیم می‌شود. بخش اول همان شرایط اولیه هیدرولیکی است که میدان فشار منفذی $p=p0$ در کل محیط سنگ برقرار است. فشار کل طبق اصل برهم‌نهی[14] ، برابر با مجموع فشارها است.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c\nabla^2 p \quad (۳۷)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس[15]، فشار به صورت رابطه (۳۸)

[14] *Superposition*

[15] *Laplace Transform*

تعیین می‌شود.

$$\tilde{p} = AI_0\left(\sqrt{\frac{S}{c}}r\right) + BK_0\left(\sqrt{\frac{S}{c}}r\right) \qquad (۳۸)$$

I_0 و K_0 توابع بسل اصلاح‌شده[16] هستند. با توجه به شرط مرزی معرفی‌شده، ضرایب A و B بصورت رابطه (۳۹) تعیین می‌شود.

$$A = 0 \quad , \quad B = -\frac{p_0}{sK_0\left(\sqrt{\frac{s}{c}}b\right)} \qquad (۳۹)$$

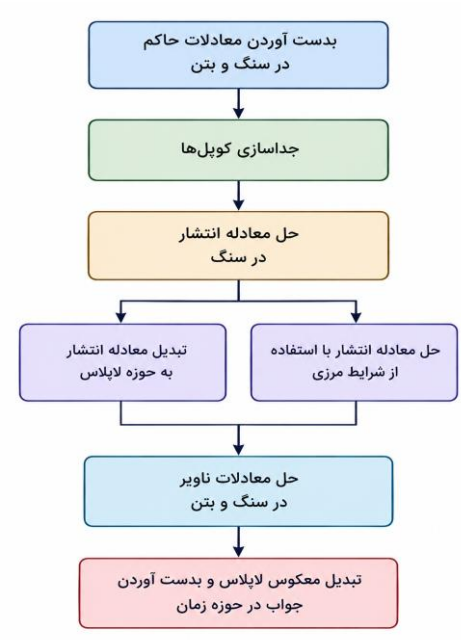
فشار منفذی کل بصورت رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{p}(r,s) = BK_0\left(\sqrt{\frac{s}{c}}r\right) + \frac{p_0}{s} \qquad (۴۰)$$

با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس، رابطه (۴۰) به حوزه زمانی برگردانده و در روابط تنش و جابجایی، جای‌گذاری می‌شود، تا مقادیر تنش و جابجایی تعیین شوند. درنهایت، راه‌حل استخراج‌شده با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون، کدنویسی شده و نتایج آن با مدل‌سازی عددی اعتبارسنجی می‌شود. در شکل ۲، فلوچارت مراحل حل مسئله مشاهده می‌شود.

جدول ۱- رابطه ثابت‌های تعیین‌شده با استفاده از شرایط مرزی بین سیمان و سنگ.

ثابت	رابطه
$A_2(t)$	$\frac{-b^2\left(-A_1(t)G^{(r)}a^2 + 2A_1(t)G^{(r)}b^2\nu^{(c)} - A_1(t)G^{(r)}b^2 + 2a^2\nu^{(c)}p_i\nu^{(r)} - a^2\nu^{(c)}p_i - 2a^2p_i\nu^{(r)} + a^2p_i\right)}{(2\nu^{(r)}-1)(G^{(c)}a^2 - G^{(c)}b^2 - G^{(r)}a^2 + 2G^{(r)}b^2\nu^{(c)} - G^{(r)}b^2)}$
B_1	$-\frac{\left(2\nu^{(c)}-1\right)\left(2A_1G^{(c)}G^{(r)}b^2 + 2G^{(c)}a^2p_i\nu^{(r)} - G^{(c)}a^2p_i - 2G^{(r)}a^2p_i\nu^{(r)} + G^{(r)}a^2p_i\right)}{2G^{(c)}(2\nu^{(r)}-1)(G^{(c)}a^2 - G^{(c)}b^2 - G^{(r)}a^2 + 2G^{(r)}b^2\nu^{(c)} - G^{(r)}b^2)}$
B_2	$-\frac{a^2b^2\left(-2A_1G^{(c)}G^{(r)} - 2G^{(c)}p_i\nu^{(r)} + G^{(c)}p_i + 4G^{(r)}\nu^{(c)}p_i\nu^{(r)} - 2G^{(r)}\nu^{(c)}p_i - 2G^{(r)}p_i\nu^{(r)} + G^{(r)}p_i\right)}{2G^{(c)}(2\nu^{(r)}-1)(G^{(c)}a^2 - G^{(c)}b^2 - G^{(r)}a^2 + 2G^{(r)}b^2\nu^{(c)} - G^{(r)}b^2)}$



شکل ۲- فلوچارت مراحل حل مسئله.

[16] *Modified Bessel*

۴- اعتبارسنجی

در این بخش، راه‌حل تحلیلی استخراج‌شده با استفاده از مدل‌سازی عددی اعتبارسنجی می‌شود. برای این منظور، از نرم‌افزار اجزا محدود *COMSOL Multiphysics 6.1* جهت شبیه‌سازی عددی مسئله استفاده می‌شود. خواص مکانیکی و هیدرولیکی سنگ و غلاف سیمانی مورد استفاده در جدول۲ ارائه شده‌اند.

سیال مورداستفاده در این مسئله آب است که به عنوان یک سیال نیوتنی با ویسکوزیته ثابت درنظر گرفته می‌شود. گرانروی، چگالی و مدول حجمی آن در جدول۳ قابل مشاهده است. مدل‌سازی عددی با استفاده از ماژول چندفیزیکی[17] پوروالاستیسیته نرم‌افزار *Comsol* انجام می‌شود. چاه با شعاع b برابر با ۰/۱ متر همراه با غلاف سیمانی با ضخامت $b-a$ برابر ۰/۰۴ درنظر گرفته می‌شود. میدان تنش کل هیدرواستاتیک اولیه برابر با ۵۰ مگاپاسکال و فشار منفذی اولیه ۱۰ مگاپاسکال درنظر گرفته می‌شود. همچنین، فشار سیال حفاری در دیواره داخلی غلاف سیمانی برابر صفر فرض شده است. مدل عددی بصورت یک چهارم مسئله با ابعاد ۴ در ۴ متر در نظر گرفته شده و مش‌بندی از نوع مثلثی آزاد[18] است. در شکل ۳ نمای کلی از مش‌بندی اطراف چاه مدل عددی مشاهده می‌شود.

جدول ۲- پارامترهای مکانیکی و هیدرولیکی ماسه‌سنگ و غلاف سیمانی برای اعتبارسنجی[۱۵-۱۹].

پارامتر	نماد	واحد	مقدار	
			ماسه‌سنگ	غلاف سیمانی
مدول حجمی	K	GPa	۱۳/۱	۳/۳۳
مدول برشی	G	GPa	۱۳/۳	۲/۵۰
ضریب پواسون	ν	-	۰/۱۲	۰/۲
تخلخل	φ	۱	۰/۰۲	-
تراوایی ذاتی	k	md	۰/۲	-
ضریب تنش مؤثر بیو	α	۱	۰/۶۳۷	-
ضریب تنش پوروالاستیک	η	۱	۰/۲۷۵	-
ضریب تحکیم	c	m^2/s	۰/۰۰۵۱	-

جدول ۳- پارامترهای سیال برای اعتبارسنجی[۱۷].

پارامتر	نماد	واحد	مقدار
گرانروی	μ	$Pa.s$	۰/۰۰۱
چگالی	ρ	kg/m^3	۱۰۰۰
مدول حجمی	K	GPa	۲/۲۵

از آنجا که رفتار هیدرومکانیکی محیط پوروالاستیک تابع زمان است، مقایسه نتایج تحلیلی و عددی بر مبنای زمان بی‌بعد انجام می‌شود. بدین منظور، زمان با استفاده از رابطه $t^*=tc/b^2$ بی‌بعد و مقدار t^* در بازه ۰/۱ تا ۱۰۰۰ درنظر گرفته می‌شود. در ادامه، نتایج حاصل از راه‌حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای فشار منفذی، تنش و جابجایی در زمان‌های بی‌بعد مختلف با یکدیگر مقایسه می‌شوند. میزان انطباق دو روش، معیار اصلی ارزیابی دقت راه‌حل تحلیلی در پیش‌بینی پاسخ هیدرومکانیکی محیط پوروالاستیک است.

در شکل ۴ تا شکل ۷، نتایج حاصل از راه‌حل تحلیلی و پاسخ مدل عددی را برای توزیع فشار منفذی، جابجایی، تنش مماسی و تنش شعاعی در زمان‌های بی‌بعد مختلف قابل مشاهده است. بر این اساس، نتایج بدست‌آمده از حل تحلیلی با نتایج مدل عددی تطابق بسیار خوبی دارند و روند تغییرات تمامی متغیرهای مورد بررسی در هر دو روش مشابه است. این تطابق نشان می‌دهد که حل تحلیلی قادر است رفتار هیدرومکانیکی محیط پوروالاستیک پیرامون چاه را با دقت مناسبی پیش‌بینی کند.

[17] *Multiphysics*

[18] *Free Triangular*

با توجه به اینکه زهکشی در مرز میان غلاف سیمانی و سنگ انجام شده است، تغییرات فشار منفذی در غلاف سیمانی صفر و توزیع تنش و جابجایی در آن مستقل از زمان است. توزیع تنش و جابجایی در ضخامت (b-a) غلاف سیمانی در شکل‌های ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود. نتایج بدست‌آمده از راه‌حل تحلیلی و مدل عددی تطابق خوبی داشته و روند تغییرات تمامی متغیرهای مورد بررسی در هر دو روش مشابه است.

برتری راه‌حل تحلیلی ارائه‌شده در سرعت و دقت محاسبات است. همانگونه که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، تغییرات تنش شعاعی در مرز داخلی غلاف سیمانی نسبت به زمان در راه حل تحلیلی مقدار صفر را نشان می دهد، در حالی که در مدل‌سازی عددی به علت تقریب در محاسبات، جواب غیر صفر مشاهده می‌شود. از طرفی دیگر، زمان محاسبات برای راه حل تحیلی به مراتب کمتر از روش عددی المان محدود در نرم‌افزار $COMSOL$ است. برای نمونه در $t^* = 100$، مدت زمان محاسبات نرم افزار ۱۲۰۰ ثانیه و برای راه‌حل تحلیلی ۲۰۰ ثانیه است.

۵- تحلیل حساسیت

پس از اعتبارسنجی راه‌حل تحلیلی و تأیید تطابق آن با نتایج مدل‌سازی عددی، حساسیت پاسخ هیدرومکانیکی چاه نسبت به پارامترهای سنگ بررسی می‌شود. در این تحلیل حساسیت، اثر تغییرات پارامترهای مدول برشی، مدول حجمی، تراوایی ذاتی، ضریب تنش مؤثر بیو و تخلخل سنگ بر تنش مماسی کل نسبت به مدل مبنا در فواصل مختلف از چاه ارزیابی می‌شود.

مدل مبنا، مدلی اعتبارسنجی شده است و صحت عملکرد آن مورد تایید می‌باشد. پارامترهای این مدل به عنوان پارامترهای پایه در نظر گرفته می‌شوند. تغییر پارامترها جهت بررسی حساسیت آن‌ها نسبت به پارامترهای پایه انجام شده و خروجی متناسب با تغییر پارامترها با پاسخ مدل مبنا ارزیابی می‌شود.

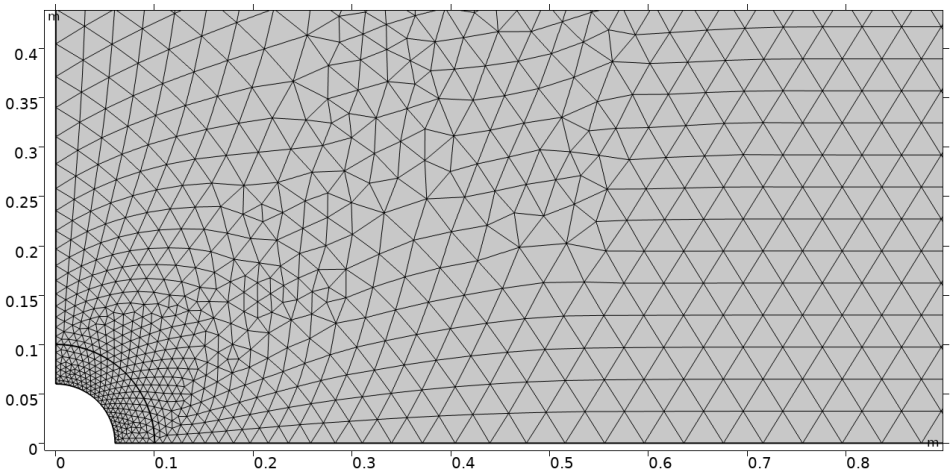
برای این منظور، پاسخ هیدرومکانیکی سیستم در دو زمان، شامل شرایط تقریباً زهکشی‌نشده در زمان کوتاه و شرایط تقریباً زهکشی‌شده در زمان بلندتر، بررسی می‌شود. در مسئله تحکیم، برای تعیین محدوده تقریبی زمان زهکشی برای طول مشخصی از محیط پوروالاستیک، از پارامتری با عنوان زمان مشخصه استفاده می‌شود. طول مشخصه (L_c) برابر با ضخامت لایه است؛ یعنی فاصله‌ای که جبهه موج کاهش فشار باید طی کند تا به دورترین ناحیه از محل تجمع فشار منفذی برسد. زمان مشخصه t_{ch} مدت‌زمانی است که در آن لایه بطور قابل‌توجهی زهکشی می‌شود (رابطه (۴۱))[۲۰].

$$t_{ch} = \frac{L_c^2}{c} \qquad (۴۱)$$

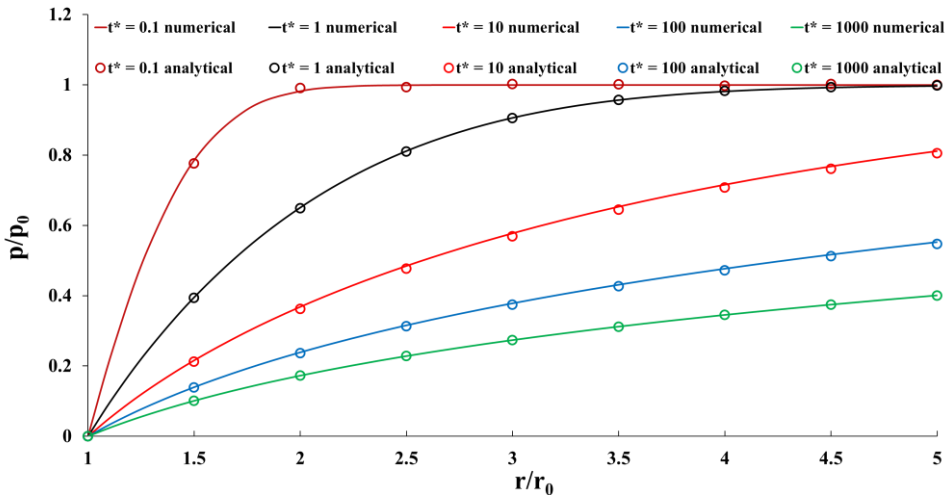
زمان‌های کوچک (پاسخ تقریباً زهکشی‌نشده) بصورت $t<< t_{ch}$ و زمان‌های بزرگ (پاسخ زهکشی‌شده) بصورت $t>> t_{ch}$ شناخته می‌شوند[۲۰]. زمان متناظر برای این بخش، زمان بی‌بعد ۰/۰۱ و ۱۰۰ تعیین شده است. هندسه و شرایط مدل مبنا در این تحلیل، همان شرایط استفاده شده در اعتبارسنجی راه‌حل تحلیلی است.

مطابق شکل ۱۲ و شکل ۱۳، افزایش مدول برشی سنگ باعث افزایش تنش مماسی کل و کاهش آن باعث کاهش تنش مماسی کل نسبت به حالت پایه می‌شود. این اثر در نزدیکی چاه بیشتر است و با افزایش فاصله از چاه کاهش می‌یابد. در زمان بی‌بعد ۰/۰۱، بیشترین اثر تغییر مدول برشی بر تنش مماسی کل در محدوده ۱ تا ۱/۵ برابر شعاع چاه مشاهده می‌شود و اثر این پارامتر در فواصل دورتر از چاه نیز همچنان قابل‌مشاهده است؛ درحالی‌که در زمان بی‌بعد ۱۰۰، تنش مماسی در فاصله کوتاه‌تری به مقدار حالت پایه نزدیک می‌شود.

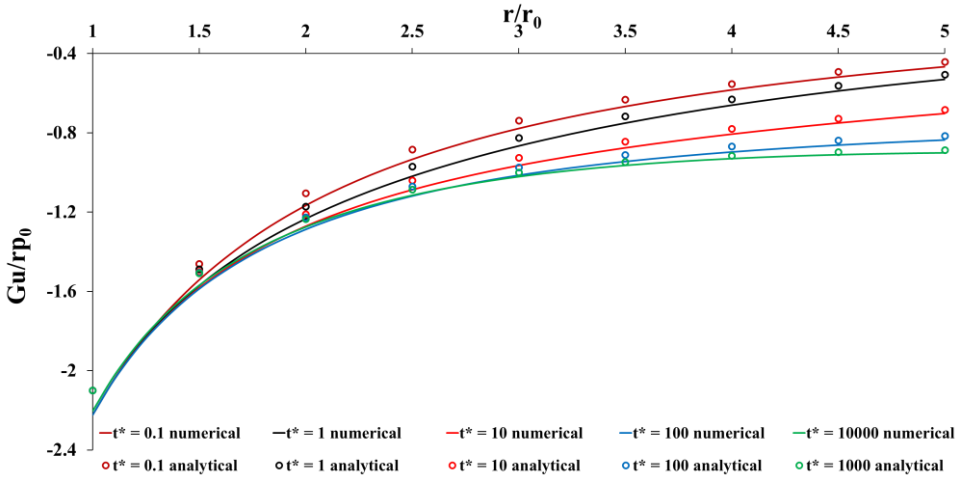
در شکل‌های و شکل ۱۵، افزایش مدول حجمی سنگ باعث افزایش تنش مماسی کل و کاهش آن باعث کاهش تنش مماسی نسبت به حالت پایه می‌شود. در زمان بی‌بعد ۰/۰۱، بیشترین تأثیر مدول حجمی بر تنش مماسی کل در نزدیکی چاه مشاهده می‌شود و با افزایش فاصله از چاه، اثر تغییر این پارامتر کاهش می‌یابد. در زمان بی‌بعد ۱۰۰، اثر مدول حجمی با افزایش فاصله از چاه کاهش کمتری نشان می‌دهد و در فواصل دورتری از چاه نیز همچنان قابل‌مشاهده است.



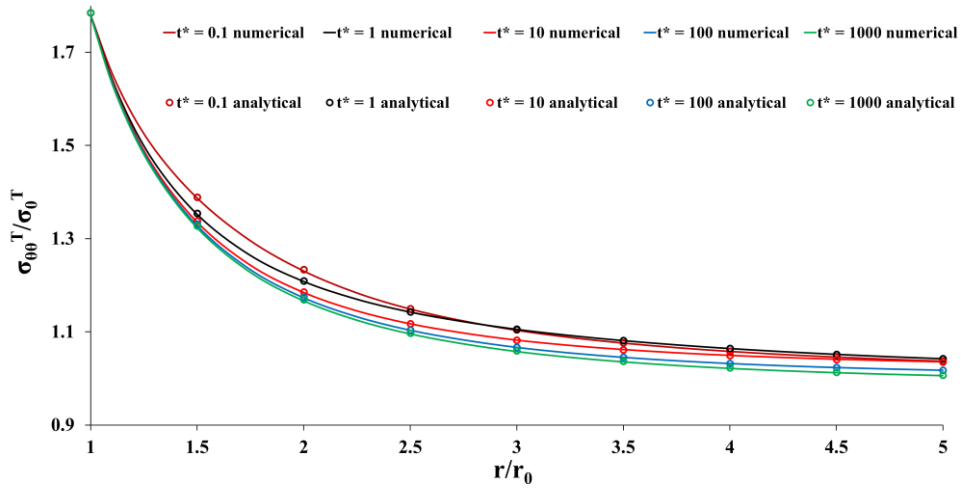
شکل ۳- نمایی از مش‌بندی اطراف چاه و لوله جداری در مدل عددی اعتبارسنجی



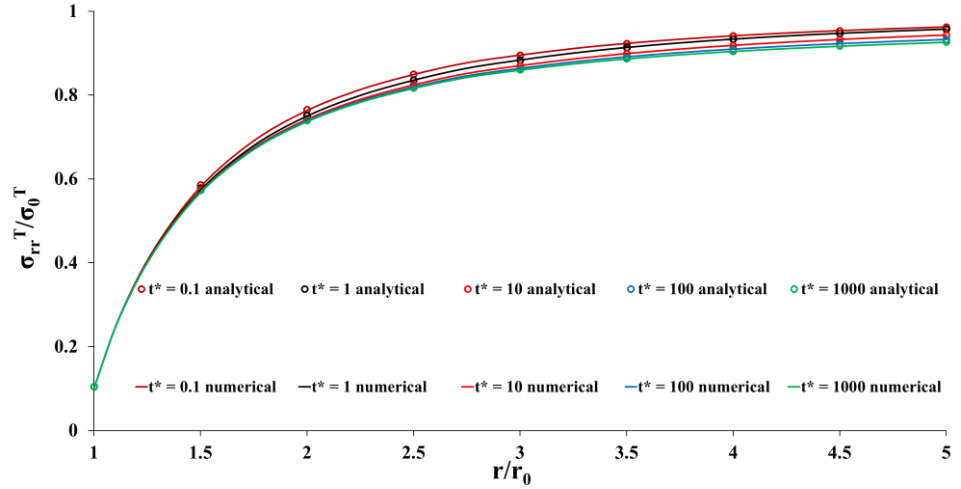
شکل ۴- توزیع فشار منفذی اطراف حفریه در زمان‌های بی‌بعد



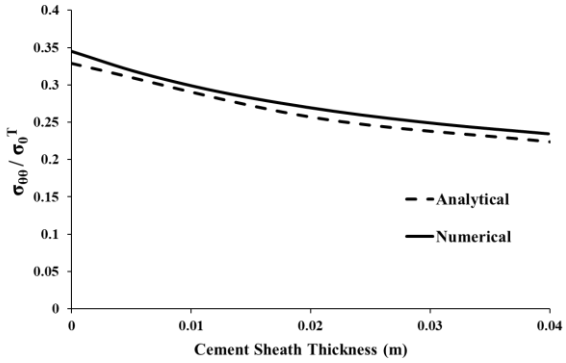
شکل ۵- توزیع جابجایی شعاعی اطراف حفریه در زمان‌های بی‌بعد



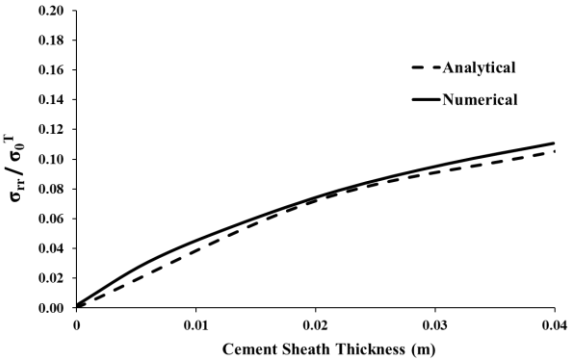
شکل ۶- توزیع تنش مماسی کل اطراف حفریه در زمان‌های بی‌بعد



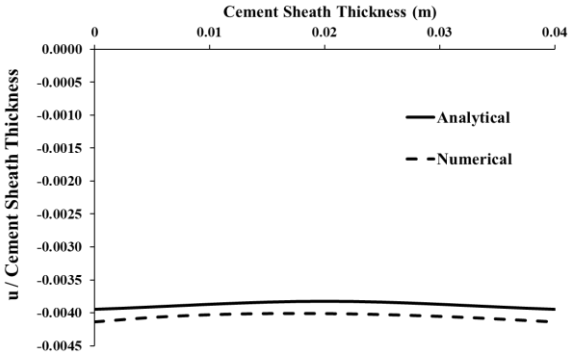
شکل ۷- توزیع تنش شعاعی کل اطراف حفریه در زمان‌های بی‌بعد



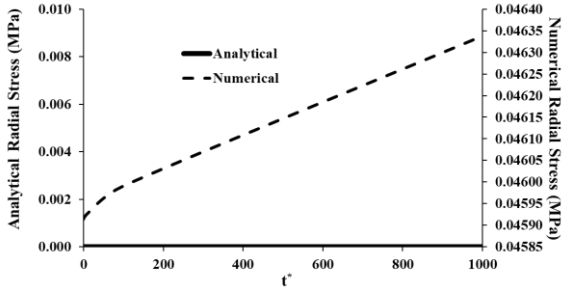
شکل ۸- توزیع تنش مماسی در ضخامت غلاف سیمانی



شکل ۹- توزیع تنش شعاعی در ضخامت غلاف سیمانی



شکل ۱۰- توزیع جابجایی در ضخامت غلاف سیمانی

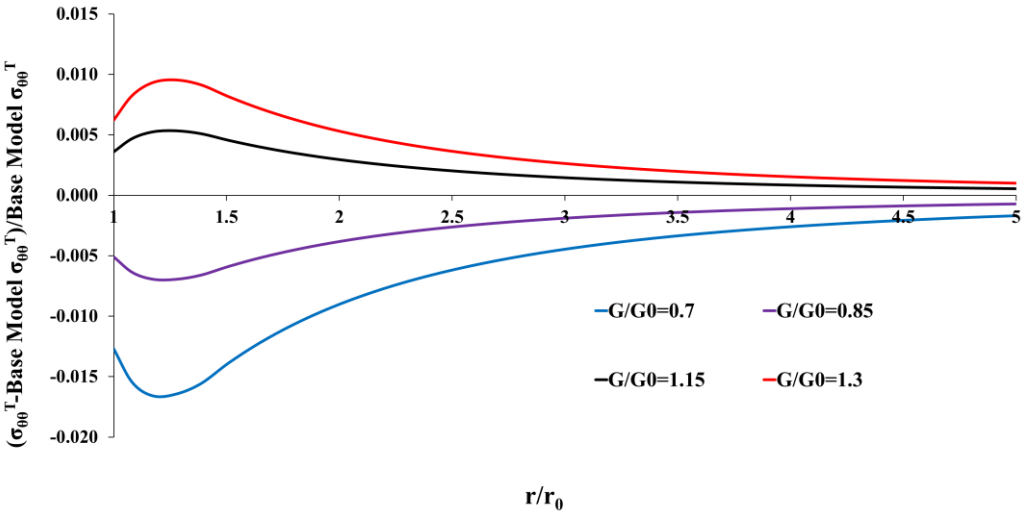


شکل ۱۱- مقایسه مقدار تنش شعاعی در دیواره داخلی غلاف سیمانی در زمان‌های مختلف

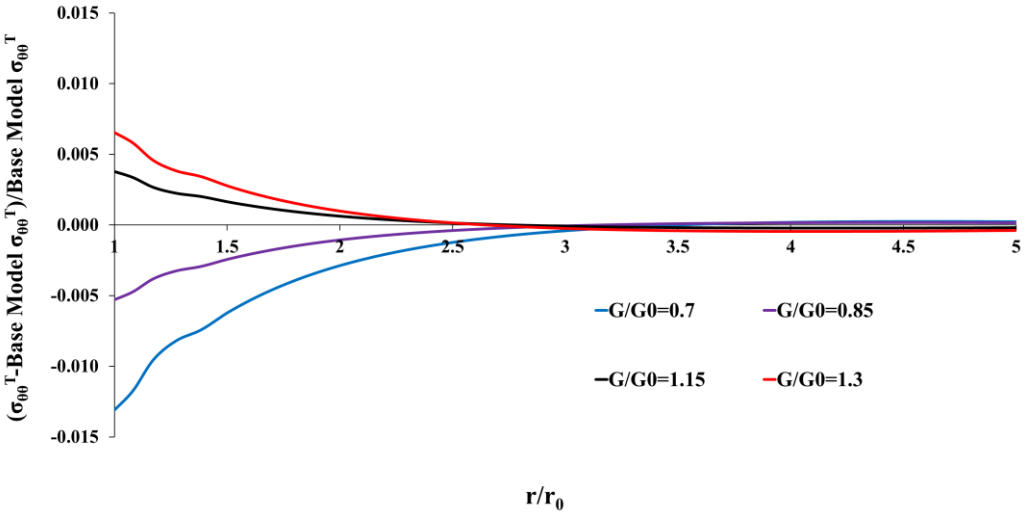
براساس شکل‌های ۱۶ و ۱۷، در زمان بی‌بعد ۰/۰۱، تغییر ضریب تراوایی تأثیر قابل‌توجهی بر پاسخ سازند در مجاورت دیواره چاه ندارد. با افزایش فاصله از چاه، اثر تغییر این پارامتر افزایش می‌یابد و در محدوده ۱ تا ۱/۵ برابر شعاع، به بیشترین مقدار خود می‌رسد؛ سپس با افزایش فاصله کاهش یافته و به مقادیر ناچیز میل می‌کند. در زمان بی‌بعد ۱۰۰، اثر ضریب تراوایی در فاصله بیشتری از دیواره چاه محسوس است و با افزایش فاصله از چاه، به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

مطابق شکل‌های ۱۸ و ۱۹، در زمان بی‌بعد ۰/۰۱، تغییر ضریب تنش مؤثر بیو تأثیر قابل‌توجهی بر پاسخ سازند در مجاورت دیواره چاه دارد. با افزایش فاصله از چاه، اثر تغییر این پارامتر افزایش و سپس ثابت می‌شود. در زمان بی‌بعد ۱۰۰، اثر ضریب تنش مؤثر بیو در نزدیکی دیواره چاه نسبت به زمان بی‌بعد ۰/۰۱ کمتر است؛ بااین‌حال، با افزایش فاصله از دیواره چاه، تأثیر تغییر این پارامتر همچنان افزایش و سپس ثابت می‌شود.

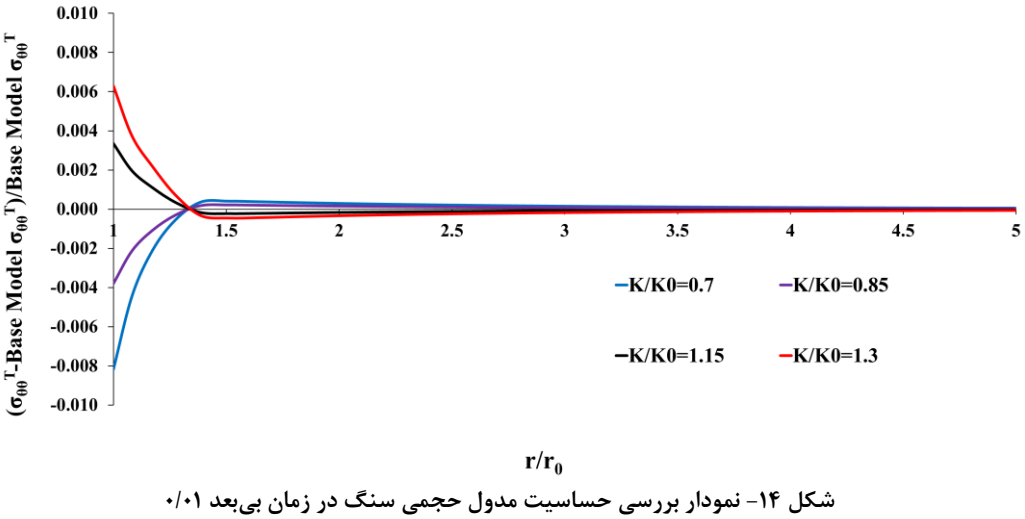
مطابق شکل‌های ۲۰ و ۲۱، در زمان بی‌بعد ۰/۰۱، تغییر تخلخل تأثیر قابل‌توجهی بر پاسخ سازند در مجاورت دیواره چاه ندارد. با افزایش فاصله از چاه، اثر تغییر این پارامتر افزایش می‌یابد و در محدوده ۱ تا ۱/۵ برابر شعاع، به بیشترین مقدار خود می‌رسد؛ سپس با افزایش فاصله کاهش یافته و به مقادیر ناچیز میل می‌کند. در زمان بی‌بعد ۱۰۰، اثر تخلخل در فاصله بیشتری از دیواره چاه محسوس است و با افزایش فاصله از چاه، به بیشترین مقدار خود می‌رسد.



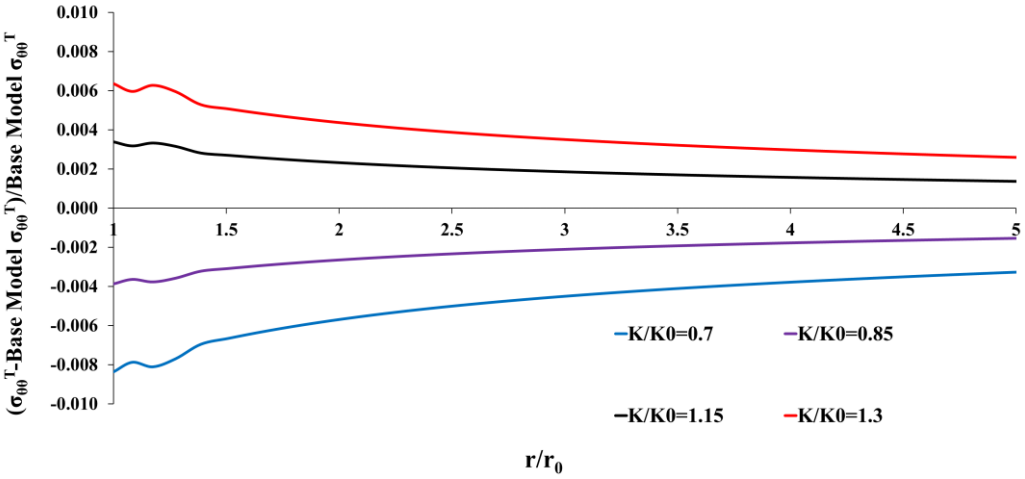
شکل ۱۲- نمودار بررسی حساسیت مدول برشی سنگ در زمان بی‌بعد ۰/۰۱



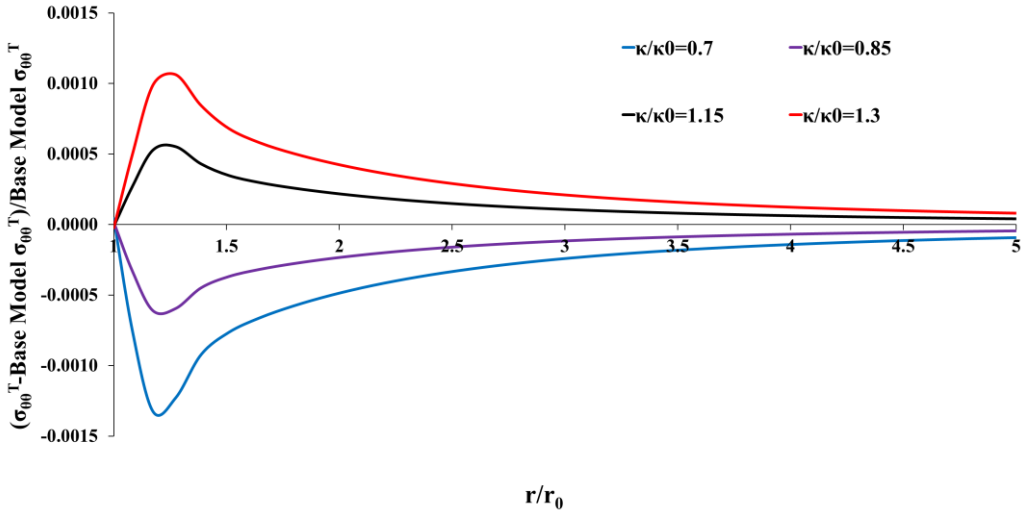
شکل ۱۳- نمودار بررسی حساسیت مدول برشی سنگ در زمان بی‌بعد ۱۰۰



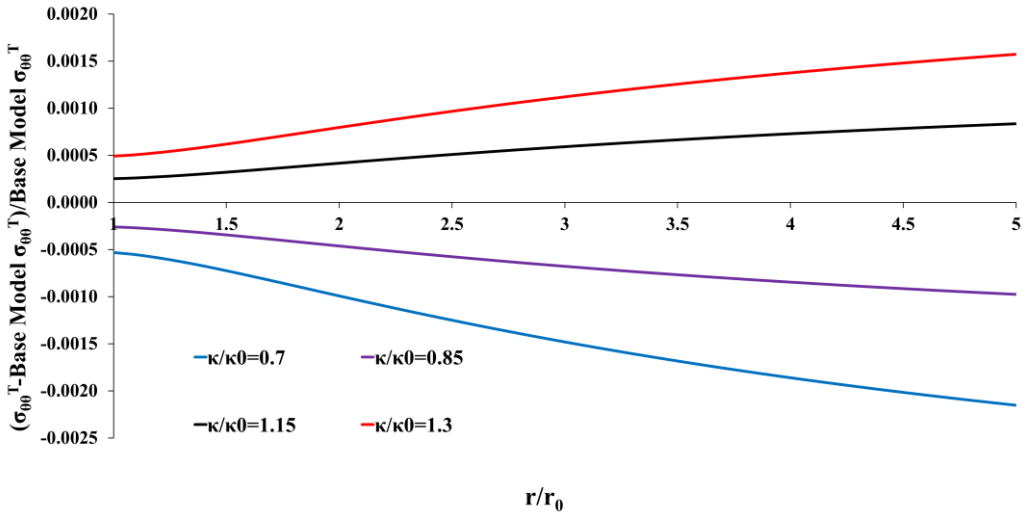
شکل ۱۴- نمودار بررسی حساسیت مدول حجمی سنگ در زمان بی‌بعد ۰/۰۱



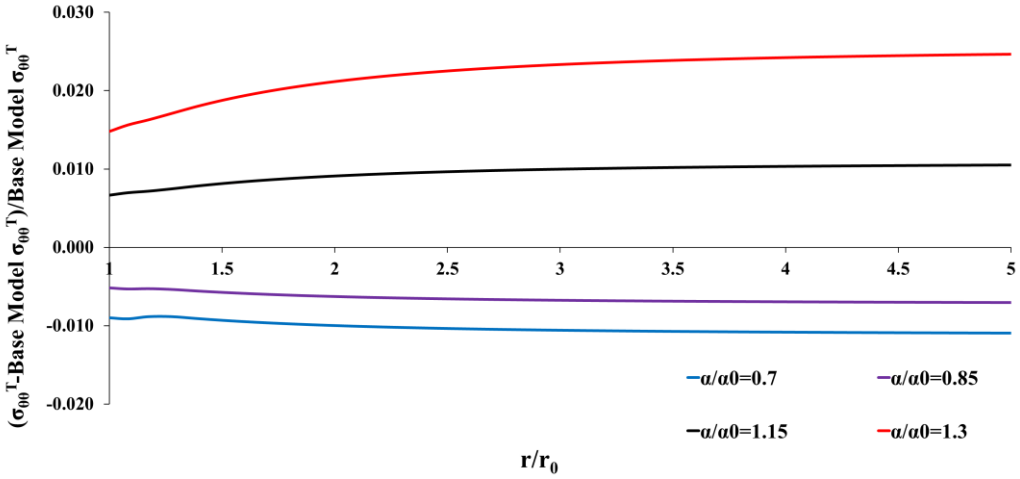
شکل ۱۵- نمودار بررسی حساسیت مدول حجمی سنگ در زمان بی‌بعد ۱۰۰



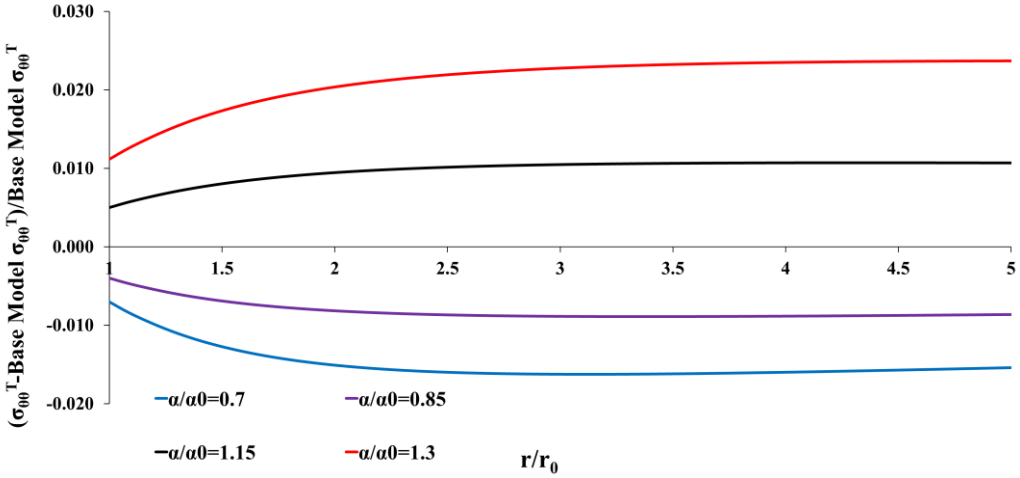
شکل ۱۶- نمودار بررسی حساسیت تراوایی سنگ در زمان بی‌بعد ۰/۰۱



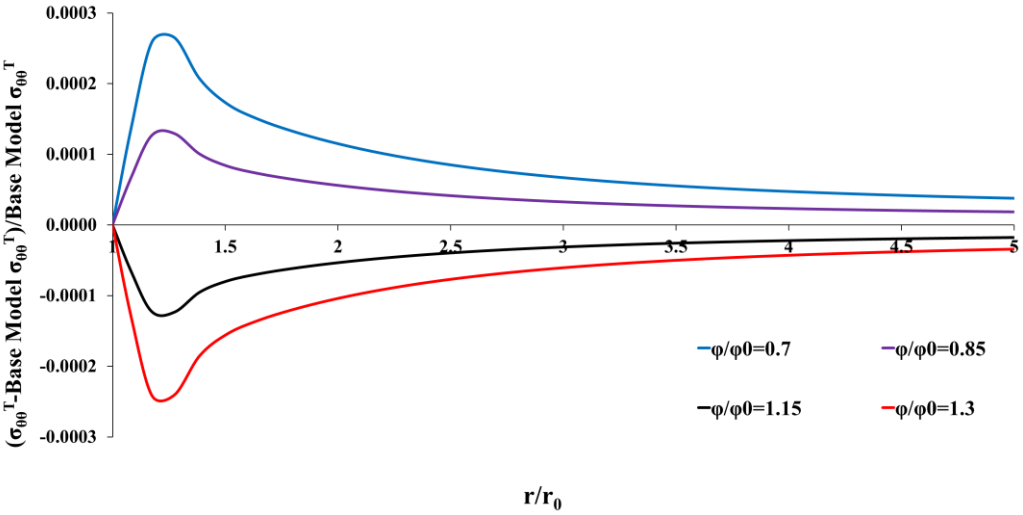
شکل ۱۷- نمودار بررسی حساسیت تراوایی سنگ در زمان بی‌بعد ۱۰۰



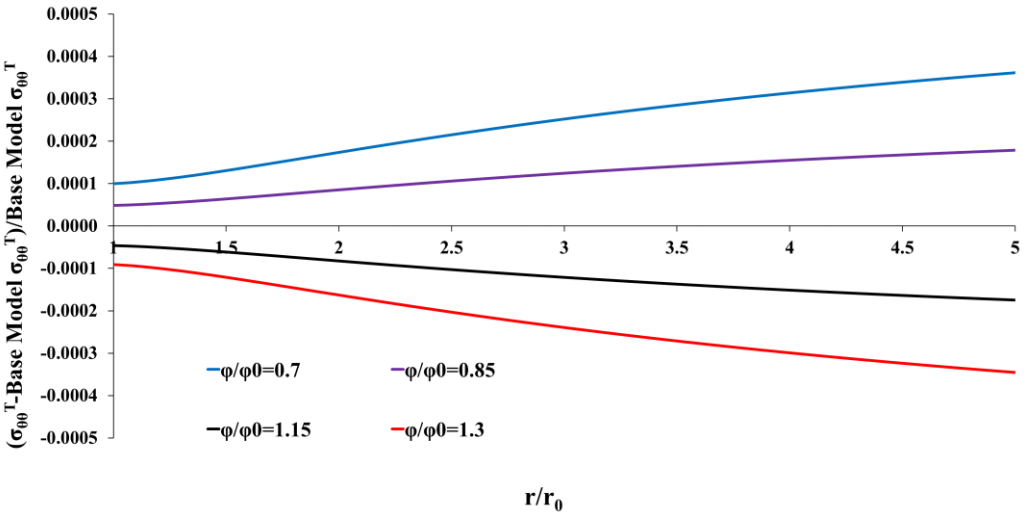
شکل ۱۸- نمودار بررسی حساسیت ضریب تنش مؤثر بیو سنگ در زمان بی‌بعد ۰/۰۱



شکل ۱۹- نمودار بررسی حساسیت ضریب تنش مؤثر بیو سنگ در زمان بی‌بعد ۱۰۰



شکل ۲۰- نمودار بررسی حساسیت تخلخل سنگ در زمان بی‌بعد ۰/۰۱



شکل ۲۱- نمودار بررسی حساسیت تخلخل سنگ در زمان بی‌بعد ۱۰۰

۶- نتیجه‌گیری

پیش‌بینی دقیق پاسخ هیدرومکانیکی چاه در سازندهای پوروالاستیک، برای ارزیابی پایداری چاه و بررسی توزیع تنش و تغییرشکل در سنگ پیرامون آن اهمیت دارد، زیرا حضور سیال منفذی موجب می‌شود پاسخ سازند بصورت وابسته به زمان تکامل یابد. در این مقاله، برخلاف راه‌حل‌های تحلیلی که عمدتاً چاه را بصورت یک حفریه باز در محیط پوروالاستیک در نظر می‌گیرند، حضور لوله جداری و اندرکنش آن با سازند در چارچوب یک راه‌حل پوروالاستیک کوپل کامل لحاظ گردید.

براین‌اساس، پاسخ هیدرومکانیکی یک چاه دایره‌ای عمیق همراه با غلاف سیمانی در محیط سنگی پوروالاستیک و اشباع تحت میدان تنش هیدرواستاتیک بررسی شد. برای این منظور، با استفاده از نظریه پوروالاستیسیته بیو، یک راه‌حل تحلیلی برای تعیین توزیع تنش، جابجایی و فشار منفذی در سنگ پیرامون چاه و غلاف سیمانی ارائه شد. راه‌حل تحلیلی با استفاده از مدل‌سازی عددی به روش اجزا محدود در نرم‌افزار *COMSOL Multiphysics 6.1* اعتبارسنجی گردید. مقایسه نتایج تحلیلی و عددی برای فشار منفذی، جابجایی، تنش شعاعی و تنش مماسی در سنگ پیرامون چاه و جابجایی و تنش در ضخامت غلاف سیمانی، تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهد. این تطابق، قابلیت راه‌حل ارائه‌شده را در پیش‌بینی پاسخ هیدرومکانیکی سیستم تأیید می‌کند. با بررسی نتایج مشخص شد که راه حل ارائه شده می‌تواند با دقت و سرعت بیشتری نسبت به روش عددی المان مجزا در نرم‌افزار *COMSOL* پاسخ را پیش‌بینی کند.

نتایج تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که:

۱. اثر پارامترهای مکانیکی و هیدرولیکی سنگ بر تنش مماسی کل، تابعی از زمان و فاصله از دیواره چاه است. مدول برشی و مدول حجمی بیشترین اثر را در مجاورت چاه نشان می‌دهند. افزایش مدول برشی و مدول حجمی موجب افزایش تنش مماسی کل نسبت به حالت پایه می‌شود و با کاهش این پارامترها، تنش مماسی کاهش می‌یابد. اثر مدول برشی با افزایش فاصله از چاه کاهش می‌یابد؛ بطوری‌که در زمان کوتاه، اثر آن تا فواصل دورتری از چاه نیز قابل‌مشاهده است، درحالی‌که در زمان بلندتر، تنش مماسی در فاصله کوتاه‌تری به مقدار حالت پایه نزدیک می‌شود. اثر مدول حجمی نیز در زمان کوتاه عمدتاً در نزدیکی چاه متمرکز است، اما در زمان بلندتر در فواصل دورتری از چاه همچنان محسوس باقی می‌ماند.

۲. تراوایی ذاتی و تخلخل در زمان کوتاه اثر محدودی بر تنش مماسی در مجاورت دیواره چاه دارند. با افزایش فاصله از چاه، اثر تغییر این دو پارامتر افزایش یافته و در محدوده حدود ۱ تا ۱/۵ برابر شعاع چاه به بیشترین مقدار می‌رسد و سپس با افزایش فاصله کاهش می‌یابد. در زمان بلندتر، اثر تراوایی و تخلخل از ناحیه نزدیک چاه به فواصل دورتری منتقل می‌شود و بیشینه اثر آنها در فاصله بیشتری از دیواره چاه مشاهده می‌شود.

۳. ضریب تنش مؤثر بیو نیز رفتار وابسته به زمان و فاصله از چاه نشان می‌دهد. در زمان کوتاه، تغییر این ضریب بر پاسخ نزدیک دیواره چاه اثر قابل‌توجهی دارد و با افزایش فاصله از چاه، اثر آن افزایش یافته و سپس تقریباً ثابت می‌شود. در زمان بلندتر، اثر ضریب تنش مؤثر بیو در نزدیکی چاه نسبت به زمان کوتاه کاهش می‌یابد، اما با افزایش فاصله از چاه همچنان افزایش یافته و در فواصل دورتر به مقدار تقریباً ثابتی می‌رسد.

در مجموع، نتایج نشان می‌دهد که پارامترهای مکانیکی، عمدتاً در ناحیه نزدیک چاه بر تنش مماسی کل اثرگذار هستند، درحالی‌که پارامترهای هیدرولیکی مانند تراوایی و تخلخل، به دلیل ماهیت وابسته به زمان فرآیند انتشار فشار منفذی، اثر خود را در فواصل دورتری از چاه نشان می‌دهند.

با توجه به ماهیت مسئله و پیچیدگی های آن جا دارد در تحقیقات آتی مدل‌های رفتاری پیچیده‌تر همانند ویسکوالاستیک یا الاستوپلاستیک در تحلیل اندرکنش چاه و لوله جداری در نظر گرفته شود.

۷- منبع‌ها

[1] A. Ibrahim, "A review of mathematical modelling approaches to tackling wellbore instability in shale formations," J. Nat. Gas Sci. Eng., vol. 89, p. 103870, 2021, doi: 10.1016/j.jngse.2021.103870.

[2] R. E. Ghahderijani and R. Shirinabadi, “Determining the Optimal Drilling Fluid Pressure for Oil Well Stability Using Geomechanical Modeling in ABAQUS Finite Element Software,” J. ROCK Mech., vol. 9, no. 3, pp. 41–59, 2025, doi: 10.22034/irsrm.2025.504159.0088.

[3] E. Detournay and A. H. D. Cheng, “Poroelastic response of a borehole in a non-hydrostatic stress field,” in International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and, Elsevier, 1988, pp. 171–182. doi: 10.1016/0148-9062(88)92299-1.

[4] A. Abdollahipour and A. Kargar, “THMC Modeling Frameworks in Porous Media: Fundamentals, Applications, and Development of the Displacement Discontinuity Method in Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Environments,” J. ROCK Mech., vol. 10, no. 1, pp. 81–101, 2026, doi: 10.22034/IRSRM.2026.587795.1084.

[5] M. A. Biot, “General theory of three-dimensional consolidation,” J. Appl. Phys., vol. 12, no. 2, pp. 155–164, 1941.

[6] M. A. Biot, “Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid,” J. Appl. Phys., vol. 26, no. 2, pp. 182–185, 1955, doi: 10.1063/1.1721956.

[7] M. A. Biot, “General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material,” J. Appl. Mech., vol. 23, no. 1, pp. 91–96, 1956, doi: 10.1115/1.4011213.

[8] L. Cui and Y. Abousleiman, “Time-dependent poromechanical responses of saturated cylinders,” J. Eng. Mech., vol. 127, no. 4, pp. 391–398, 2001.

[9] Y. Gao et al., “Cylindrical borehole failure in a poroelastic medium,” J. Appl. Mech., vol. 83, no. 6, p. 61005, 2016.

[10] A. Abdollahipour, M. Fatehi Marji, A. Yarahmadi Bafghi, and J. Gholamnejad, “A complete formulation of an indirect boundary element method for poroelastic rocks,” Comput. Geotech., vol. 74, pp. 15–25, 2016, doi: 10.1016/j.compgeo.2015.12.011.

[11] Y. Lu, W. Li, Y. Jin, M. Chen, H. Pang, and W. Zhou, “Short-and long-term wellbore stability analysis for a horizontal well in a transversely isotropic poroelastic formation,” Rock Mech. Rock Eng., vol. 58, no. 1, pp. 767–786, 2025.

[12] W.-D. Li et al., “Fully anisotropic undrained effects on short-term wellbore stability of arbitrarily inclined wells in transversely isotropic formations,” Pet. Sci., 2026.

[13] R. Gholami, V. Rasouli, B. Aadnoy, and M. Mohammadnejad, “Geomechanical and numerical studies of casing damages in a reservoir with solid production,” Rock Mech. Rock Eng., vol. 49, no. 4, pp. 1441–1460, 2016, doi: 10.1007/s00603-015-0828-5.

[14] A. Abdollahipour, M. F. Marji, A. Y. Bafghi, and J. Gholamnejad, “Time-dependent crack propagation in a poroelastic medium using a fully coupled hydromechanical displacement discontinuity method,” Int. J. Fract., vol. 199, no. 1, pp. 71–87, 2016.

[15] L. Han, F. Yin, S. Yang, W. Liu, and Y. Deng, “Coupled seepage-mechanical modeling to evaluate formation deformation and casing failure in waterflooding oilfields,” J. Pet. Sci. Eng., vol. 180, pp. 124–129, 2019, doi: 10.1016/j.petrol.2019.05.035.

[16] Z. Xu, P. Lin, H. Xing, D. Pan, and X. Huang, "Hydro-mechanical Coupling Response Behaviors in Tunnel Subjected to a Water-Filled Karst Cave," Rock Mech. Rock Eng., vol. 54, no. 8, pp. 3737–3756, 2021, doi: 10.1007/s00603-021-02423-0.

[17] J. R. Rice and M. P. Cleary, "Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents," Rev. Geophys., vol. 14, no. 2, pp. 227–241, 1976, doi: 10.1029/RG014i002p00227.

[18] A. Verruijt, "Elastic storage of aquifers," Flow through porous media, vol. 1, pp. 331–376, 1969.

[19] E. Detournay and A. H. D. Cheng, "Fundamentals of poroelasticity," in Comprehensive rock engineering. Vol. 2, Elsevier, 1993, pp. 113–171. doi: 10.1016/b978-0-08-040615-2.50011-3.

[20] A. H.-D. Cheng, Poroelasticity, vol. 27. Springer, 2016.

[21] T. He et al., "Failure mode of cement sheath in salt cavern gas storge wellbore based on coupling plasticity and damage evolution," Int. J. Rock Mech. Min. Sci., vol. 160, p. 105272, 2022, doi: 10.1016/j.ijrmms.2022.105272.

Journal of Rock Mechanics
Vol. 10, No. 2, PP. 25-43, (2026)

https://doi.org/10.22034/IRSRM.2026.505958.1122



Analytical Investigation of Wellbore–Casing Interaction in a Saturated Poroelastic Medium under Hydrostatic Stress Conditions

Ali Eghbali Moghaddam[1]; Abolfazl Abdollahipour[1]; Ali Reza Kargar[1*]

1- School of Mining Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran.

Received: 25 July 2026 Accepted: 27 September 2026
(*Corresponding author: ar.kargar@ut.ac.ir)

Keywords

Poroelasticity
Time-Dependent Response
Governing equations
Hydromechanical Coupling
Analytical Solution
Casing

Final English Abstract

The stability of wellbores drilled in saturated rock formations is an important consideration in the safe design and operation of wells, as it depends on the interaction between the solid skeleton and pore fluid and, consequently, on the time-dependent evolution of stress, displacement, and pore pressure. However, most existing analytical solutions consider the wellbore as an open cavity in a poroelastic medium and do not account for the simultaneous presence of a casing and its interaction with the surrounding formation. This study presents a fully coupled analytical solution for determining the hydromechanical response of a deep circular wellbore with a casing embedded in a saturated poroelastic rock formation. Based on the theory of poroelasticity, the distributions of stress, displacement, and pore pressure in the rock, as well as stress and displacement in the casing, are derived. The analytical solution is verified against finite element numerical modeling using COMSOL Multiphysics, and the effects of the shear modulus, bulk modulus, intrinsic permeability, Biot effective stress coefficient, and porosity on tangential stress are investigated at different times. The results show very good agreement between the analytical predictions and the numerical results for pore pressure, displacement, radial stress, and tangential stress in both the rock and casing. The sensitivity analysis indicates that the shear and bulk moduli have a greater influence on tangential stress near the wellbore, whereas the effects of permeability and porosity reach their maximum at a distance of approximately 1–1.5 times the wellbore radius at short times and remain noticeable at greater distances at longer times. These findings demonstrate that the proposed analytical solution can serve as a tool for evaluating the hydromechanical response of cased wellbores and as a benchmark for verifying numerical models.